Classe : 2^{nde} 3 A rendre le 28/04/2004

MATHEMATIQUES , devoir maison N°5

Exercice 1 : Soit $(O;\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé.

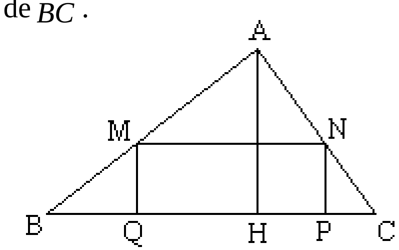
1. Placer dans ce repère les points $A(-2\ ;\ 2)$, $B(2\ ;\ 4)$ et $C(0\ ;\ -2)$.
2. Montrer que le triangle ABC est rectangle isocèle en un point à préciser.
3. Soit I le pied de la hauteur du triangle ABC issue de A.
   Que peut-on dire du point I ? (Justifier.) En déduire les coordonnées de I.
4. Soit G le centre de gravité du triangle ABC.
   a) Placer le point G puis calculer ses coordonnées (utiliser une égalité vectorielle caractérisant le centre de gravité).
   b) Vérifier la relation $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

Exercice 2 : Le plan est muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Soient $A(2\ ;\ 1)$ et $B(-3\ ;\ 1)$ deux points du plan et $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ un vecteur.

1. Déterminer une équation de la droite d passant par A et dont un vecteur directeur est $\vec{u}$.
2. Une deuxième droite d' a pour équation $y=-\frac{1}{2}x-1$.
   Les droites d et d' sont-elles parallèles ?
3. Soient $a\in\mathbb{R}$ et $C(a\ ;\ a+1)$ un point du plan.
   Trouver la valeur de a pour laquelle les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.
   Pour cette valeur de a, exprimer $\vec{u}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$.

Exercice 3 :



ABC est un triangle tel que BC = 8 cm.
Sa hauteur [AH] est telle que AH = 4 cm.
On veut inscrire dans ce triangle un rectangle MNPQ dont les sommets P et Q sont sur [BC], M sur [AB] et N sur [AC]. On se propose de déterminer les longueurs MN et NP pour que le périmètre de MNPQ soit égal à 12 cm.
On pose MN = y et NP = x.

1. Exprimer x et y en fonction de $\frac{\text{AN}}{\text{AC}}$, et en déduire le système $\begin{cases}x+y=6\\ \frac{x}{4}+\frac{y}{8}=1\end{cases}$.
2. Résoudre le système et conclure.

Correction du devoir maison N°5

Exercice 1:

1.

2. $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(2+2)^2+(4-2)^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

$AC=\sqrt{(0+2)^2+(-2-2)^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

$BC=\sqrt{(0-2)^2+(-2-4)^2}=\sqrt{4+36}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

On obtient alors $AB=AC$ et le triangle ABC est isocèle en A.
Si le triangle est rectangle, alors son hypoténuse est $[BC]$
or $BC^2=40$ et $AB^2+AC^2=20+20=40$ d'où $BC^2=AB^2+AC^2$ et d'après la réciproque du théorème de Pythagore, on conclut que le triangle ABC est rectangle en A.
En conclusion, ABC est rectangle isocèle en A.

3. Comme ABC est isocèle en A, la hauteur issue de A est aussi la médiatrice de $[BC]$, donc I est le milieu de $[BC]$

On a alors $x_I=\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{2+0}{2}=1$ et $y_I=\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{4-2}{2}=1$ donc $I(1\ ;\ 1)$

4. G est le centre de gravité du triangle ABC.

a) On a $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}x_G-x_A\\y_G-y_A\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}x_G+2\\y_G-2\end{pmatrix}$

et $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}1+2\\1-2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ et $\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}2\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$

On obtient alors $x_G+2=2$ et $x_G=0$

et $y_G-2=-\frac{2}{3}$ d'où $y_G=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$ Donc $G\left(0\ ;\frac{4}{3}\right)$

b) $\overrightarrow{GA}\begin{pmatrix}-2-0\\2-\frac{4}{3}\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{GA}\begin{pmatrix}-2\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{GB}\begin{pmatrix}2-0\\4-\frac{4}{3}\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{GB}\begin{pmatrix}2\\ \frac{8}{3}\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{GC}\begin{pmatrix}0-0\\-2-\frac{4}{3}\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{GC}\begin{pmatrix}0\\-\frac{10}{3}\end{pmatrix}$ Alors $\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)\begin{pmatrix}-2+2+0\\ \frac{2}{3}+\frac{8}{3}-\frac{10}{3}\end{pmatrix}$

donc $\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

Exercice 2:

1. L'abscisse de $\vec{u}$ est non nulle, donc une équation de *d* est de la forme

$y=mx+p$ de plus un autre vecteur de *d* est $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

et une équation de *d* est de la forme $y=-\frac{1}{2}x+p$

A(2 ; 1) est sur *d*, d'où $1=-\frac{1}{2}\times 2+p$ et $p=2$,

donc une équation de *d* est : $y=-\frac{1}{2}x+2$

2. Les droites *d* et *d'* ont le même coefficient directeur, elles sont donc parallèles .

3. $a\in\mathbb{R}$ et C(*a* ; *a* + 1) ; $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}a+3\\a+1-1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}a+3\\a\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

Comme $\overrightarrow{BC}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, on obtient : $(a+3)\times\frac{1}{2}-(-1)\times a=0$

ce qui donne $\frac{3}{2}a+\frac{3}{2}=0$ donc $a=-1$

Dans ce cas, on a $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ alors $-2\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BC}=-2\vec{u}$

Exercice 3:

1. Les points A, N, C et A, M, B sont alignés, les droites (MN) et (BC) sont parallèles, donc d'après le théorème de Thalès,on a :

$\frac{\text{AN}}{\text{AC}}=\frac{\text{AM}}{\text{AB}}=\frac{\text{MN}}{\text{BC}}$ et MN = *y* . On a alors $\frac{\text{AN}}{\text{AC}} = \frac{y}{8}$

Les points C, N, A et C, P, H sont alignés, les droites (NP) et (AH) sont parallèles d'après le théorème de Thalès, on a : $\frac{\text{CN}}{\text{CA}}=\frac{\text{CP}}{\text{CH}}=\frac{\text{NP}}{\text{AH}}$ et NP = *x*.

On a alors : $\frac{\text{CN}}{\text{CA}} = \frac{x}{4}$ et on a CN = CA – AN d'où $\frac{\text{CA}-\text{AN}}{\text{CA}} = \frac{x}{4}$

et $\frac{\text{AN}}{\text{AC}} = 1-\frac{x}{4}$. On obtient alors $\frac{y}{8}=1-\frac{x}{4}$, ce qui donne $\frac{x}{4}+\frac{y}{8}=1$

De plus le périmètre du rectangle est 12, ce qui donne 2*x* + 2*y* = 12 et *x* + *y* = 6

On obtient alors le système $\begin{cases} x+y=6 & [1] \\ \frac{x}{4}+\frac{y}{8}=1 & [2] \end{cases}$

2. $1\times\frac{1}{8}-1\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{8}\neq 0$ donc le système admet un unique couple solution. On multiplie l'équation [2] par 4, ce qui donne : $\begin{cases} x+y=6 \\ x+\frac{y}{2}=4 \end{cases}$

En soustrayant les deux équations, on a : $y-\frac{y}{2}=6-4$ et donc *y* = 4.

On remplace *y* par 4 dans la première équation, et on obtient *x* = 2.
Le système admet alors un unique couple solution : (*x* ; *y*) = (2 ; 4).
Donc M et N sont placés sur [AB] et [AC] tels que MN = 4 cm et NP = 2 cm.