Classe : 2^{nde} 9 A rendre le 28/03/2003

MATHEMATIQUES

Devoir maison 5

Exercice 1 : **Droite d'Euler dans un triangle**

ABC est un triangle et O le centre de son cercle circonscrit. A' est le milieu du segment [BC], B' celui de [CA] et C' celui de [AB].

A. Caractérisation vectorielle de l'orthocentre

On considère le point H défini par : $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. [1]

1. Justifier que $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA'}$. [2]

2. Déduire de la relation [1] que $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA'}$.

3. Démontrer alors que les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires.

4. De la même manière, démontrer que la droite (BH) est perpendiculaire à la droite (AC).

5. Que représente le point H pour le triangle ABC ?

B. Droite d'Euler

G désigne le centre de gravité du triangle ABC.

1. En partant de l'égalité $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GA'}$, démontrer que : $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OA'}$.

2. En déduire que $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OH}$.

3. En déduire l'alignement de O, G, H lorsque le triangle ABC n'est pas équilatéral.

4. Que peut-on dire des points O, G et H dans le cas où ABC est un triangle équilatéral ?

Exercice 2 : On se place dan un repère $(O ; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ du plan.

Prenons les points suivants : A(1 ; 0), B(0 ; -2), C(-3 ; -8), D(4 ; 1), E$(2 ; -\frac{4}{3})$.

a) A, B et C sont-ils alignés ? Justifier la réponse.

b) Même question pour C, D et E.

c) Démontrer que (AD) et (BE) sont parallèles.

Exercice 3 : Soit ABC un triangle quelconque. On place le point P symétrique de A par rapport à B, le point Q symétrique de B par rapport à C et le point R symétrique de C par rapport à A. On appelle I le milieu de [BC] et K le milieu de [PQ]. on appelle G et H les centres de gravité des triangles ABC et PQR.

On choisit le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

1. Déterminer les coordonnées des points A, B et C.

2. Déterminer les coordonnées du point I, puis celles du point G.

3. Déterminer les coordonnées des points R, P, Q et K.

4. Démontrer que les points G et H sont confondus.

Correction du DM N°5

Exercice 1 : **A – Caractérisation vectorielle de l'orthocentre**

H est défini par $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

1. $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'C}$ d'après la relation de Chasles

$= 2\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C}$

de plus A' est le milieu de [BC], on a alors $\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{0}$

et on obtient $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA'}$.

2. De l'égalité $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, on déduit $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OA'}$

d'où $\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{AO} = 2\overrightarrow{OA'}$ et $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA'}$.

3. D'après la question **2.**, $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{OA'}$ sont colinéaires, d'où (AH) et (OA') sont parallèles, de plus (OA') est la médiatrice de [BC],

donc (OA') est perpendiculaire à (BC).

En conclusion, (BC) et (AH) sont perpendiculaires.

4. De même $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{B'C}$

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{B'C} = 2\overrightarrow{OB'}$ car B' est le milieu de [AC]

et d'après [1], on obtient $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{BO} = 2\overrightarrow{OB'}$ et $\overrightarrow{BH} = 2\overrightarrow{OB'}$

$\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{OB'}$ sont colinéaires, (BH) et (OB') sont alors parallèles

de plus (OB') est la médiatrice de [AC], (OB') et (AC) sont alors perpendiculaires et on en déduit alors que (BH) et (AC) sont perpendiculaires

5. H est alors le point d'intersection de (BH) et (AH) qui sont deux hauteurs du triangle ABC. Donc H est l'orthocentre du triangle ABC.

B – Droite d'Euler

G est le centre de gravité du triangle ABC.

1. On a alors $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GA'}$

$\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA} = -2\overrightarrow{GO} - 2\overrightarrow{OA'}$ d'où $3\overrightarrow{GO} = -\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OA'}$

ce qui donne $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OA'}$.

2. D'après la question **A - 2.**, on a $2\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{AH}$, ce qui donne :

$3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OH}$.

3. Les vecteurs $\overrightarrow{OG}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont alors colinéaires,

si les trois points O, G et H ne sont pas confondus, on conclut alors qu'ils sont alignés.

Dans le cas d'un triangle équilatéral, les droites remarquables du triangle sont confondues, donc les trois points O, G et H sont confondus.

Exercice 2 : Dans un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ du plan :

a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-4\\-8\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-3\\-6\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AB}$ $\left(\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{AB}\right)$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et les points A, B et C sont alignés.

b) $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}7\\9\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}5\\ \frac{20}{3}\end{pmatrix}$; $\left(\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}-2\\ -\frac{7}{3}\end{pmatrix}\right)$ $xy' - x'y = 7 \times \frac{20}{3} - 5 \times 9$

$= \frac{140}{3} - \frac{135}{3} = \frac{5}{3} \neq 0.$

Donc $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CE}$ ne sont pas colinéaires et les points C, D et E ne sont pas alignés.

c) $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}2\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ $xy' - x'y = 3 \times \frac{2}{3} - 2 \times 1 = 2 - 2 = 0$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont colinéaires et les droites (AD) et (BE) sont parallèles.

<u>Exercice 3 :</u> Dans le repère $(A\ ;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$

1. A(0 ; 0) , B(1 ; 0) , C(0 ; 1).

2. I est le milieu de [BC], d'où $x_I = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$

et $y_I = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$ donc $I(\frac{1}{2}\ ;\frac{1}{2})$.

G est le centre de gravité du triangle ABC, d'où $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$

et $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}x_G\\y_G\end{pmatrix}$

Donc $x_G = \frac{1}{3}$ et $y_G = \frac{1}{3}$ et $G(\frac{1}{3}\ ;\frac{1}{3})$.

3. R est le symétrique de C par rapport à C, d'où A est le milieu de [RC]

et on a alors $x_A = \frac{x_C + x_R}{2}$ d'où $0 = \frac{0 + x_R}{2}$ et $x_R = 0$

et $y_A = \frac{y_C + y_R}{2}$ d'où $0 = \frac{1 + y_R}{2}$ et $y_R = -1$ Donc R(0 ; -1).

En faisant de même pour P et Q, on obtient P(2 ; 0) et Q(-1 ; 2).

De plus K est le milieu de [PQ], donc

$x_K = \frac{x_P + x_Q}{2} = \frac{1}{2}$ et $y_K = \frac{y_P + y_Q}{2} = 1$ Donc $K(\frac{1}{2}\ ; 1)$.

H est le centre de gravité du triangle PQR, d'où $\overrightarrow{RH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{RK}$.

et $\overrightarrow{RK}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\2\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{RK}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{4}{3}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{RK}\begin{pmatrix}x_H\\x_H + 1\end{pmatrix}$ d'où $x_H = \frac{1}{3}$ et $y_H = \frac{1}{3}$ et $H(\frac{1}{3}\ ;\frac{1}{3})$

G et H ont les mêmes coordonnées, ils sont donc confondus.